Vzorečky I

skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & ba_z \end{vmatrix}$

velikost vektoru $|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, kde α je skalár.

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

polární souřadnice:

$x = r \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \sin \varphi$	$\varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x}$

cylindrické souřadnice:

$x = \varrho \cos \varphi$	$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \varrho \sin \varphi$	$\varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

sférické souřadnice:

$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$\varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x}$
$z = r \cos \theta$	$\theta = \mathrm{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

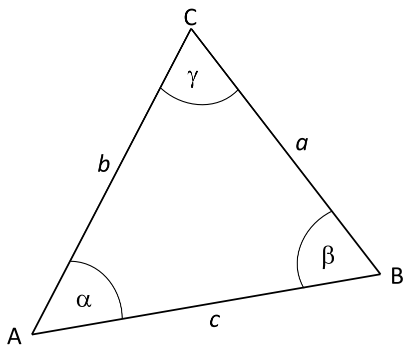
goniometrické vzorce:

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y + \cos x$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x + \sin y$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$



Sinová věta

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$

Kosinová věta

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

funkce	derivace	podmínka
C	0	$C \in \mathbf{R}$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$n \neq 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$a\ f(x) + b\ g(x)$	$a\ f'(x) + b\ g'(x)$	$a, b \in \mathbf{R}$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	
$f(g(x))$	$f'(x)g'(x)$	

lokální minimum funkce $f(x)$ v bodě x_0	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$
	$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$
lokální maximum funkce $f(x)$ v bodě x_0	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$
	$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$

neurčitý integrál (primitivní funkce):

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x + C$, kde C je libovolná konstanta

integrace „per partes“

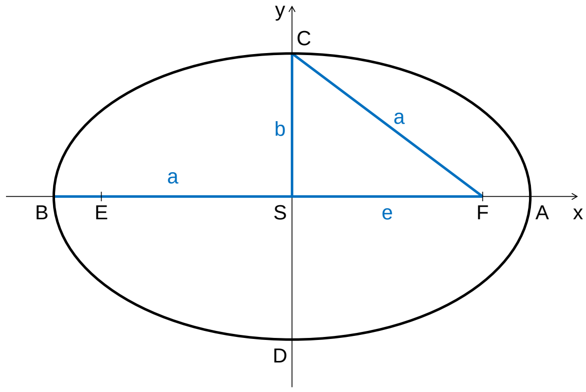
$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

substituce v integrálu

$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$, kde $y = g(x)$

určitý integrál:

$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$



vlastnosti elipsy

hlavní poloosa	a
vedlejší poloosa	b
excentricita	$e^2 = a^2 - b^2$
numerická excentricita	$\varepsilon = \frac{e}{a}$
perihelium	$r_{min} = a(1 - \varepsilon)$
afelium	$r_{max} = a(1 + \varepsilon)$
	$a = (r_{min} + r_{max})/2$
	$e = (r_{max} - r_{max})/2$

Třetí Kepplerův zákon	$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$
Ciolkovského rovnice (bez gravitace)	$\Delta V = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$
Ciolkovského rovnice (s gravitací)	$\Delta V + gT = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$
Newtonův gravitační zákon	$\mathbf{F} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\lvert\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\rvert^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$

gravitační konstanta κ	6.67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
střední vzdálenost Země od Slunce (1 AU)	149.6×10^6 km
numerická excentricita oběžné dráhy Země	0.0167
poloměr Země	6378 km
poloměr Měsíce	1738 km
hmotnost Země	5.97×10^{24} kg
hmotnost Měsíce	7.35×10^{22} kg

Newtonův gravitační zákon

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\lvert\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\rvert^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

vztah intenzity a potenciálu gravitačního pole

$$\mathbf{K} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

rychlost $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

zrychlení $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

tečné zrychlení $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, kde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

normálové zrychlení $a_n = \frac{v^2}{R}$, kde R je poloměr křivosti trajektorie

dráha uražená v časovém intervalu od t_1 do t_2 $s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t$

druhý Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$

tíhová síla $\vec{F} = m\vec{g}$

tíhové zrychlení Země $g = 9.81$ m s^{-2}.

hybnost : $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
potenciální energie (v homogenním tíhovém poli): $E_p = mgh$
práce: $A = \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \Delta E_k = -\Delta E_p$
výkon: $P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

třecí síla: $\mathbf{F}_t = f\ \mathbf{F}_n$
dostředivé zrychlení: $a_d = \frac{v^2}{R}$

síla působící na nataženou pružinu: $F = -k\Delta l$
úhlová frekvence harmonického oscilátoru: $\omega = \sqrt{k/m}$

pevná kladka: $F_1 = F_2$
volná kladka: $F_1 = \frac{1}{2}F_2$

pohybová rovnice harmonického oscilátoru: $\ddot{x} = -\omega^2 x$
obecné řešení pohybu harmonického oscilátoru: $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$
síla působící na nataženou pružinu: $F = -k\Delta l$

odstředivá síla: $\vec{F}_o = -m\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r})$
Coriolisova síla: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$